الحساب التحليلـــيّ للقضايا المنطقيـــة (جـــــبر المنطق).

د. سمية محمود الجـربي ـــ كلية الآداب واللغات – جامعة طرابلس

الملخّـــــــص:

لقد استغل العلماء كافة العلوم المختلفة ـ وعلى رأسها الرياضيات ـ منهج المنطق المميز وألفاظه الدقيقة لحل المشكلات الرياضية وذلك باستخدام الرموز المنطقية، وعلى رأسهم (جـــورج بول) الذي يُنسب إليه البداية الحقيقية لجبر المنطق، فالحساب التحليلي للقضايا المنطقية والمعروف ـ أيضًا ـ بـ "جبر المنطـق" هو فرع من فروع المنطق الرمـزي الذي يدرس القضايا المنطقية باستخدام الأساليب الرياضية، والهدف الرئيسي لهذا الموضوع هو تحليل العبارات المنطقية وتحديد صحتها أو زيفها من خلال استخدام العمليات الجبرية، فالحساب التحليلي للقضايا المنطقية يوفر أدوات قوية لتحليل المنطق بشكل دقيق ومنظم، من خلال استخدام الرمز الرياضي، يسهل تحليل القضايا المعقدة وتطبيق النتائج في مختلف مجالات العلوم والهندسة، وقد اتبعت الباحثة المنهج الوصفي التحليلي لاعتباره المنهج الأنسب لطبيعة الدراسة الحالية، ومن خلال تحليل هدف البحث تبين النتائج أن المنطق المعاصر قد جسد نقلة حاسمة وقوية في تطور علم المنطق وتوظيفه لطرق خاصة في تصنيف القضايا، واستكماله لنواقص المنطق التقليدي لأرسطو، حيث أضاف المنطق الرياضي المعاصر مزيدًا من الدقة والاستيعاب والتحقق من الصحة الصورية للاستدلالات.

الكلمات المفتاحية : الحساب التحليلي، القضايا المنطقية، جبر المنطق.

ANALYTICAL CALCULUS OF LOGICAL PROPOSITIONS
(BOOLEAN ALGEBRA)

Abstract

Scientists across various fields, particularly in mathematics, have leveraged the distinctive methods of logic and its precise terminology to solve mathematical problems using logical symbols. Notably, *George Boole* is recognized as the father of Boolean Algebra. The analytical calculus of logical propositions, known as Boolean Algebra, is a branch of Symbolic Logic that employs mathematical methods to study these propositions. The primary objective of this topic is to analyze logical statements and determine their truth or falsity through the application of algebraic operations. The analytical calculus of logical propositions provides powerful tools for a precise and systematic analysis of logic by employing

mathematical symbols, facilitating the analysis of complex propositions and the application of results in various fields of science and engineering. The researcher adopts a descriptive-analytical approach, deemed the most suitable methodology for the current study. Analysis of the study objective reveals that contemporary logic represents a decisive and significant advancement in the development of logical science, employing specialized methods for classifying propositions and addressing the shortcomings of traditional Aristotelian logic. Contemporary mathematical logic has added greater precision, comprehensiveness, and verification of the formal validity of inferences.
KEYWORDS: Analytical Calculus - Logical Propositions - Boolean Algebra.

المقدمـــــــــــة:

يعـــد جبر المنطق المرحلة الأولى من تطوير المنطق المعاصر، فهذه الضروب من الجبر المنطقـــي مع أعمال جورج بول وبيرس وشرودر، وانطلقت كلها من أفكار أساسية عرضها بول والتي كانت هي فكرة العالم ليبنتز وهي إمكانية أن نعبّر عن صورة اللغة المنطقية برموز مشابهة للرموز الجبرية بهدف إخضاع علم المنطق للحساب، لذا اعتبر بول الفصل (أو) مثل الجمع، والعطف (و) مثل الضرب، ورمز للصنف الفارغ بالصفر (0) وإلى الصنف التام برقم (1)، ومن هنا تم التوصل إلى تكوين الجبر المنطقي، والمتغيرات فيه تسمى اصنافًا، ولكنها يمكن أن تؤل تأويلات أخرى(1).

مشكلة الدراسة :

تشكّلت مشكلة الدراسة حول كيفية استخدام الأساليب الخوارزمية لجبر المنطق في تحليل وحل القضايا المنطقية المعقدة.

هدف الدراسة :

نهدف من خلال هذا البحث فهم المبادئ الأساسية لجبر المنطق، بما في ذلك المفاهيم الرئيسية مثل الجمل المنطقية، المتغيرات، والعوامل المنطقية.

المنهج المتبع في الدراسة.

استعانت الدراسة بالمنهج الوصفي التحليلي لاعتباره المنهج الأكثر ملائمة لطبيعة الدراســــة.

أقسام الدراسة:

وبناء على المنهج المتبع في الدراسة، تم تقسيم البحث كالتالي: أولًا: القضية المنطقية. ثانيًا: حساب القضايا. ثالثًا: جبر المنطق. رابعًا: جبر الأصناف والمنطق الرمزي خامسًا : الحساب التحليلي للقضايا المنطقية من خلال جبر المنطق.

الإطار النظـــــــــــري.

أولًا ــ القضية المنطقية :

لمفهوم القضية مكانة جوهرية في المنطق قديمه وحديثه، فالمنطقي الذي لا يهتم إلا بصحة وضرورة العلاقة بين أجـــزاء الكلام، فإنه يشترط في هذه الأجزاء أن تكون قضايا لها قيمة صدق، لا مجرد أقوال أو ألفاظ، فالقضية في المنطــق هي كل قول يحتمل الصدق أو الكذب أو "هي كل قول بسيط يمكن أن يكون صادقا أو كاذبا"، وهذا معناه أن القضية في المنطق هي التركيب الخبري أو القول الجازم القابل ؛ لأن يوصف بالصدق أو الكذب, ويخرج بذلك عن تعريف القضية كل الأساليب الإنشائية مثل: الاستفهام والتعجب والتمني والأمر...الخ لأنها لا تخضع لشرط قابلية الصدق أو الكذب (2) ، كما يخرج عن تعريف القضية المنطقية " الأقوال الفاسدة في تركيبها النحوي والأقوال التي لا معنى لها رغم صحة بنائها التركيبي"، كما يخرج عن تعريفها - أيضا - الأقوال التي تحيل إلى نفسها Auto reference مثل: (هذا القول كاذب)، وذلك لأن مثل هذه الأقوال تؤدي إلى مفارقات حين تسند إليها قيمة الصدق أو الكذب.

تنقسم القضايا في المنطق إلى بســـيطة ومركبة، تتكوّن القضايا البسيطة من معنيين أو حدين مفردين لا يمكن أن نصف كل واحد منهما لوحده بالصدق أو الكذب ، مثل (السماء ممطرة) أو (المتنبي شاعر)، أما القضية المركبة فهي التي تتألف من قضايا بسيطة ،وبالتالي نستطيع الحكم على أجزائها بالصدق أو الكذب مثل (ديكارت فيلسوف ورياضي)، التي تنفك إلى القضيتين : الأولى (ديكارت فيلسوف) والثانية (ديكارت رياضي) اللتين نستطيع أن نحكم على كل منهما بالصدق أو بالكذب ، وتنقسم القضايا المركبة في المنطق المعاصر إما إلى قضايا صادقة دائما وتسمى تكرارية، أو قضايا كاذبة دائما تسمى متناقضة، أو صادقة في حالات وكاذبة في حالات أخرى وتسمى عرضية ، وترتبط أجـزاء القضية المركبة فيما بينها بأدوات الربط في اللغة الطبيعية مثل واو العطف ، أو والعلاقة بين أجزاء القضية المركبة هي علاقة ربط قضوي (3) .

لكن ينبغـــي التأكيد على أن المنطقيين المعاصرين كان لهم موقف خاص من القضية الحملية الأرســـطية التي لا يمكن أن تكون في نظرهم قضية بسيطة ، كما ذهب إلى ذلك المنطق الصوري القديم ، وذلك لأنها بعد إخضاعها للتحليل المنطقي المستند إلى التعبير الرمزي الدقيق (مفهوم الدالة والحجة الذي وضعه فريجه)، حيث

يتبين أنها تنفك إلى علاقة لزوم في الكليات يعبر عنه بالسور الكلي ورابط الاستلزام المنطقي أو عطف في الجزئيات يعبّر عنه بالسور الوجودي ورابط الوصل المنطقي ، إن القضية التالية (كل إنسان فان) تعني حسب التأويل المعاصر أنه إذا كان الكائن إنسانا كان فانيا، وتبني المقال على افتراض تلازم بين تصورين ولا تحيل إلى أي وجود ، على عكس الجزئية التي تقر بوجود موضوعها، وقد جرت العادة أن يعبر في المنطق الحديث عن هذا الفرق بهذا الشكل:

كل أب A(س) : أس ← ب(س)

لا أب A(س): أ(س) ← ~ ب(س)

بعض أب E(س): أ(س) ∧ ب(س)

ليس بعض أب E(س): أ(س) ∧ ~ ب(س)

وقد ترتّب عن هذا الموقف مشكلة عرفت في المنطق المعاصر بمشكلة الدلالة الوجودية في القضايا الحملية ، والتي شككت في عمليات استنتاجية هي من صميم المنطق الصوري القديم مثل العكوس الناقصة والاستنتاج بالمداخلة، وإذا كان المنطق القديم يجعل مرجع الحكم على القضايا بالصدق أو الكذب هو مطابقة أو عدم مطابقة مضمونها للواقع، فإن المنطق الرمزي المعاصر الذي رغم أنه يحافظ على نفس تعريف القضية، لا يهتم كثيرا بمرجع أو طبيعة أو أصل هذا الصدق والكذب، فهو يتبني مفهوما للصدق والكذب يمكن أن نسميه بالصدق الرمزي والكذب الرمـــزي(4)

ثانيًا ــ حســـــاب القضايا :

في البداية يتوجب توضيح التعريف اللفظي لنظرية (حساب القضايا) ، أي: لكلمة "حساب" و"قضية "، فليس المقصود بالحساب هنا هو عملية التعداد المألوفة الرياضية؛ وإنما المقصود به عملية أخرى شبيهة وهي الطريقة الآلية التقنية التي يقوم الذهن بها بهدف استنباط الأحكام بصورة رمزية بسيطة أو مركبة بالصدق والكذب بطريقة منطقية خالصة ، أما عن لفظ "القضية" فهو يعبّر عن كل جملة خبرية قد تحتمل الصدق أو الكذب، وبالتالي فإن الجملة الإنشائية كالأسئلة والأوامر والنواهـي وصيغ التعجب أو الطلب كلها مستبعدة تمامًا من منطق القضايا بشقيه التقليدي والرياضي، فكل قضية جملة ولكن ليس كل جملة قضية(5)

أما عن تصنيف القضايا في المنطق الرياضي الحديث وهو محل دراستنا باعتبارنا سوف نتطرق إلى "جبر المنطق "، فتنقســـم إلى قضايا بسيطة ذرية وقضايا مركبة،

فالذرية هي التي لا يمكن أن تنحل إلى ما هو أبسط منها مثل قضية (أحمد ليبي)، الحد (أحمد) هو علم وليس فئة، بل ينتمي إلى فئة (الليبيين) ، وتسمّى هذه القضية بـ/ "العضوية في فئة" وهذا النوع الأول، وهناك قضية ثانية وبسـيطة حمليه تمامًا ، والتي يكون الحد في صورة صفة مثل (أحمد ذكي)، فالحد (ذكي) صفة محمولة على الحد (أحمد)، أما النوع الثالث من القضايا الذرية وهي "قضية العلاقة" حيث يرتبط فيها الحدان برابطة مثل (أحمد صديق علي) وهنا تكون الرابطة الصداقة(6)، وأما القضايا المركبة فهي مؤلفة من عدة قضايا بسيطة ذرية وبينهم روابط مختلفة مثل ثابت الوصل (حرف العطف و)، ثابت الفصل (حرف العطف أو)، ثابت اللزوم (إذا، فإن... إلخ)، مثال (عليّ مدرس وهو طالب جامعي) وتعتبر هذه قضية متصلة، (إذا كان الشمس طالعة فإن النهار موجود) هذه قضية شرطية متصلة أو لزومية.

ثالثًا ــ جبر المنطـــــق:

يعرف جبر المنطق بكونه فرع من المنطق الرياضي والذي يقوم على استخدام المناهج الجبرية في دراسة الموضوعات المنطقية كالفئات والقضايا، حيث تعبر القضية من جهة فكرة (حكم) وتعبر من جهة أخرى عن صدق أو عن كذب (ص أو ك)، ويدرس جبر المنطق القضايا من حيث الصدق فقط، وتعتبر الأقوال متكافئة إذا كانت لها قيمة الصدق نفسها، وبذلك يقوم جبر المنطق على تطبيق لغة ومنهج ونسق الجبر – الذي يعد جزء من الرياضيات- على المنطق، فجبر المنطق كما يتصوره "ليبنتز" أراد أن يعوض التصورات بتركيبات من الرموز، استعاضة القضايا بعلاقات بين الرموز، وكذلك استبدال الاستدلال بضرب من الحساب يقوم بتقديم طريقة ناجحة لبرهنة القضايا واكتشاف قضايا جديدة منها(7)

لقد ظهر جبر المنطق في عصرين متباعدين بينهما قرن ونصف ، فقد ظهر عند ليبنتز ولكن ظلت كتاباته فيه مجهولة حتى اكتشف هذا الجبر من جديد عند مؤلف من القرن الماضي هو جورج بول Boole وبعد أن أصبح هذا الجبر حركة عالمية اهتم بعض البحاث بإحياء تراث ليبنتز، ولقد أدعى جبر المنطـــق منذ ظهوره في القرن الماضي بأنه المنطق " بالحقيقة "، واعتقد جبريو المنطق بأن علمهم في صورته الجبرية هذه هو فرع من فروع الرياضة الكثيرة أو نظرية جبرية كغيرها من نظريات الجبر التي ظهرت في نفس القرن كجبر الأعداد الرباعية Quaternions عند رووان هاملتون، والحساب الهندسي Imaginary Numbersالتخيلية جراسمان ، ونظرية المجاميع Theory of Sets عند جورج كانتور وغيرها، لقد بدأ جبر المنطق في

القرن الماضي بكتاب لجورج بول عام 1847م ، ونشطت بعده الأبحاث فيه عند ماكول MacColl وفن Venn وجيفونز Jevons في انجلترا ثم أصبح حركة عالمية بفضل كتابات بيرس Pierce في أمريكا ، وكتابات شرودر Schroder في ألمانيا، ويعتبر مؤلف هذا الأخير الضخم Alegebra der Logik أسهب مرجع في هذه النظرية، ولكن كانت خاتمة الأبحاث فيه الكتيب القيم حقاً الذي كتبه في مطلع هذا القرن المنطقي الفرنسي لويس كوتوراه L. Couturatعام 1901م ، ذلك المؤلف الذي يعتبر بحق أوضح مرجع في هذا الموضوع(8)

ولقد توقفت الأبحاث فيه عند مؤلف لويس كوتوراه المذكور بسبب ظهور اللوجستيقا منذ عام 1903م وهو عام ظهور مؤلف برتراند راسل في المنطق الرياضي المسمى "أصول الرياضة" لأن جبر المنطق هذا أصبح قسمًا من أقسام اللوجستيقا الجديد ويقابل حساب الفئات Calculus of Classes فيه، وفوق هذا ؛ لأنه كان جبرا أكثر منه منطقاً في رموزه وفي مسائله وفي طرق حلها وحتى في تفسير نتائجه التي كانت على خلاف الأنواع الجبرية الأخرى لا تقبل تفسيرًا عدديا إلا لقيمتي صفر وواحد (0، 1) فقط ، أي : كان جبرا محدود القيم العددية، بالإضافة الى تفسيرين منطقيين ممكنين.

فأولا : كان جبرا أكثر منه منطقاً في رموزه؛ لأن أكثر رموزه تشير الى ثوابت رياضية لا الى ثوابت المنطق التي لم يلتفت اليها إلا اللوجستيقا فيما بعد ، وثانيا : كان جبرًا في طرق حل مسائله فقد كانت تطبق فيه طرق بسط المعادلات الرياضية Expansion of Equations أو قواعد الحساب الرياضي دون قواعد المنطق وقوانينه .

وثالثا : في تفسير نتائج عملياته ، فإن جبر المنطق رغم ادعائه بأنه المنطق بالذات كان كغيره من أنواع الجبر الأخرى يقبل تفسيرا عدديا، ولا يختلف عنها إلا في شيء واحد هو أن ذلك التفسير العددي ؛ إنما كان منحصرًا في حدود عددين اثنين هما صفر وواحد ، أي : لا تصدق نتائجه عدديا إلا في حدود هاتين القيمتين العدديتين، فهو بذلك جبر عددي محدود القيم .

ورابعا كان جبرا أكثر منه منطقاً ؛ لأنه كان يقبل بالعرض تفسيرًا منطقيا عندما تجعل قيمتي الصدق والكذب المنطقتين تقابلان القيمتين العدديتين المقبولتين فيه وهما على الترتيب الواحد والصفر، وهذا ما يجعل المنطق أحد التفسير بن الممكنين الجبر المنطق ، وخامسا حتى في نطاق التفسير المنطقي المحتمل كان يقبل تفسيرا منطقيا

مزدوجاً فتارة يكون التفسير بلغة القضايا وتارة بلغة التصورات أو الفئات Classes على ما بين القضايا والتصورات من تفاوت منطقي كبير.

وبناء على كل هذه الأسباب يظل جبر المنطق جبر أكثر منه منطقًا(9)

جورج بول والذي ترجع اليه البدايات الفعلية لتأسيس المنطق الرياضي في أول أشكاله حيث يعد مؤسس ذلك الشكل المنطقي المستوحى من الرياضيات وسماه "جبر المنطق"، والذي يجعل من المنطق والرياضيات متقاربين إلى حد كبير، وقد جعل بول القضايا في صورة رمزية وجعل من تلك القضايا حسابات تجـــري عليها عمليات الضرب والجمع، كذلك عمل على أن يجعل المنطق علما رمزيًا، والرموز في المنطق الرمزي نوعان هما : المتغيرات، والثوابت، إلا أن بول استخدم كلمة المتغيرات ولم يستخدم الثوابت. أما الثوابت التي نجدها في منطق بول فهي ثوابت الرياضة أو هي اشارات عملية كعمليات الجمع (+) والطرح (-) والقسمة والمساواة (=) والصفر (0) والواحد الصحيح (1)، وهي تتمثل في عمليات العقل الذي بواسطته يصل دمج أو حل تصورات الأشياء بحيث تتكون مفاهيم جديدة تتضمن نفس العناصر(10)

ونلاحظ أن بول قد حاول دمج الرموز على العمليات الحسابية لتصبح ذات طابع رمزي رياضي، كما أنه حاول الفصل بين المنطق والدراسات الميتافيزيقية مؤكدًا بقوله أنه : ليس من الجائز ربط المنطق بالميتافيزيقا؛ بل ربط المنطق بالرياضيات، ويضيف : المنطق يشبه الهندسة يقوم على الحقائق البديهية، وهذا ما يثبت مدى تقارب واتصال الرياضيات والمنطق مما جعل جورج بول يبعد المنطق عن الميتافيزيقا، وعليه يبدو أن بول ينسب خاصية الرمزية للمنطق منذ ارسطو، وإن كانت الرمزية فيه ضعيفة وغير مكتملة، وهذا الرأي يخالف موقف (برتراند راسل) الذي نظـر إلى المنطق القديم بأنه فلسفي والمعاصر على أنه رمزي ، بينما اعتبر بول المنطق كعلم ارتبط بالرمزية منذ القديم، وبأن حقائق المنطق اقرب في طبيعتها إلى حقائق الرياضيات، وعلى أثر هذا تمكن من بناء منطق رمزي يقترب من روح الرياضيات وطبيعتها، حيث نجد أن جورج بول لم يقلل من شأن المنطق الأرسطي ؛ بل اهتم به وحاول التعبير عنه بلغة رمزية كما نظر اليه على أنه قابل للصياغة الرمزية الرياضية، كما يعني هذا أن بول استطاع أن يصل إلى جبر عام مجرد يتمثل في قوانين الفكر الأساسية، واستبعاد اللغة العادية الغير دقيقة وإحلال محلها لغة رمزية دقيقة كلغة الحساب وحاول إقامة المنطق على هذا الأساس، ومن خلال كتابه الشهير "قوانين الفكر" توصل من خلاله الى إلى اكتشاف فكرة هامة وتتمثل في أن قوانين

الجبر وضعها بصرف النظر عن أي تفســير جزئي خاص، حيث يقول لقد وضعت الرسالة التالية بغرض فحص القوانين الأساسية لتلك العمليات التي يتم التفكير العقلي بواسطتها، والتعبير عنها في اللغة الرمزية لحساب ما وإقامة علم المنطق على هذا الأساس، وجعل هذا المنهج نفسه أساسًا لمنهج عام لتطبيق النظرية الرياضية(11)

وقد قدم كل من جورج بول ومن بعده دي مورغان في منتصف القرن 19م نظام معالجات رياضية للمنطق إن لم نقل جبرية ، حيث عززت المنطق التقليدي إلى بنية وافية من أسس الرياضيات، حيث يعد عمل جورج بول "جبر المنطق " من أبرز الأعمال التي لها علاقة قوية ومباشرة مع المنطق الرياضي، بناء على محاولته لتطبيق عمليات جبرية على المنطق، وتعتبر أعمال بول جديرة بالاهتمام فقد استوحي مجمل اعماله من الاستدلال الجبري الذي يقوم في الأساس على "الرموز"، فبعد أن قام بول بتصنيفه للرموز حسب وظيفتها قام بالبحث في وظيفتها في اللغة العادية، حتي يمكن التعبير عن هذه الوظائف برموز مماثلة للرموز الجبرية، إلى أن توصل إلى إنشاء ضرب خاص من الجبر كحساب صوري، والذي لا يرتبط بتأويل معين، إلا إنه يتلقى تأويلًا طبيعيًا عندما نعتبره بشكل منصف منطقًا، وكذلك فالمنطق التقليدي يعد منطقًا حقيقيًا ولكن ما عالجه بول رياضيًا منح المنطق أمانًا واسعًا جعل منه علمًا جديدًا حقيقيًا أضاف للمعرفة.

ويعرض بول في منظومة جبر المنطق- تلك المنظومة التي بالرغم من نواقصها- يمكن وصفها بأنها مكتملة، بمعنى : أنها تقدم لأجل حل مسألة منطقية شملة مشكلات المنطق التقليدي ، يتخطى هذا الحل ما نسميه بأساليب القرار التي تسمح بحسابات فاعلة، حيث يلاحظ أن هناك اختلاف كلي بين التصور الجديد للمنطق والتصور القديم، حيث يقول بول بأنه ليس هناك شبه بين المنطق والفلسفة، أي : دراسة الوجود الفعلي والبحث عن الأسباب، فلم يعد معقولًا أن يتم الجمع بين المنطق والغيبيات ، بل من الصحيح أن يتم الجمع بين المنطق والرياضيات، فالمنطق كالهندسة حيث يقوم على حقائق بديهية وتعريفاته مبنية على النظرية العامة للرمزية التي تشكل أساس كل ما مهو معترف به كتحليل، وهذا التغير في الاتجاه في طريقة فهم المنطق أثر بشكل كبير على تجدد العلم خلال النصف الثاني من القرن التاسع عشر(12)، لذلك يعد جورج بول G. Boole (1815 -1864) بحق مؤسس المنطق الرمزي ؛ لأنه وضع مبادئ أولى نظرياته ، وهي نظرية : "حساب الأصناف " Calculus of Classes (وكان يسميها هو "حساب المنطق "Calculus of Logic)، ونلاحظ أن الرياضيات

كانت موضوع الدراسة الأصيل عند بول منذ حداثته لا المنطق، وأنه دخل إلى المنطق بصدفة عابرة، ثم تعلّق به من بعد، حيث اضطر إلى البحث عن عمل في صباه لفقر أبيه، فاشتغل معلماً في مدرسة وهو في السادسة عشرة، وكان يقبل على القراءة في وقت فراغه، قيل : إنه قرأ بيكوك وجريجوري وروان هاملتون ودي مورجان ، وهم رياضيون معاصرون لبول ومشاهير بأبحاثهم القيمة في الرياضيات العليا(13)

كتب بول عدة مقالات في الجبر والتحليل، نال بعد نشـــرها جوائز مالية ـ في غمرة قراءاته الرياضية ـ تقديراً له وتشجيعاً، قرأ بمحض الصدفة المساجلات الحادة بين وليم هاملتون ودي مورجان حول اتهام الأول أن الثاني ســـرق منه نظرية كم المحمول وادّعى السبق في صياغتها، ولاحظ بول من تلك المساجلات أن هاملتون يرفض إدخال الرياضيات في علم المنطق ، فحفّزه ذلك إلى تكوين منطق يقوم على الرياضيات، قدّم بول كتابين الأول في المنطق التحليلي الرياضي ، ومقالة في حساب البرهنة الاستنباطية The Mathematical Analysis of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning (1847)، ، كتب بول في السنة التالية مقالاً يوضح فيه مشروعه الجديد للمنطق عنوانه حساب المنطق، نشره في مجلة كمبردج الرياضية ، ثم عين أستاذاً للرياضيات في جامعة كورك Cork بإيرلندا عام 1849، حيث عكف على كتابة كتابه المنطقي الكبير " بحث في قوانين الفكر تقوم عليها النظريات الرياضية في المنطق والاحتمالات" (1854م)، وانغمس بول في ذلك البحث لدرجة أنه قال وقتئذ أن المنطق أصبح دراسته الجادة، بينما كان يتجه إلى الرياضيات للترويح عن النفس(14)

إن من أهم مميزات الحساب المنطقي البولي أنه يستند إلى استخدام الرموز بالإضافة إلى قواعد تأليف تلك الرموز، ولذا فإن بول يميز بين قسمين في إطار الحساب المنطقي، وهما معا يؤلفان ما يطلق عليه جبر المنطق البولي Boolean Logical Algebra، والقسمين هما حساب الفصول Calculus of Classes وحساب القضايا Calculus of Propositions، ومن خلال القسمين تبدو نظرة بول الحسابية على اعتبار أنه يستخدم علم العدد كنموذج لحسابه المنطقي؛ ولذا فإنه قبل أن نشير إلى هذين القسمين لابد وأن نقف على الرموز التي يستخدمها بول في حسابه الجبري المنطقي، وقد وضع بول مجموعة من الرموز الأساسية التي يستخدمها في إجراء عملياته الاستنباطية التحليلية، وهي(15):

ـ يرمز للأشياء أو الموضوعات بالرموز **z, y, x** التي تمثل الفصول.

ـيرمز للعمليات الرياضية بالرموز (+، -، ×، ÷) وهي بمثابة الثوابت المنطقية ووظيفة هذه الرموز أنها تؤدي إلى تأليف تصورات جديدة ابتداء من التصورات التي لدينا.

ـ يضع رمزًا لعلاقة الذاتية Identity وهو علامة المساواة (=) المستخدمة في الجبر العادي Ordinary Algebra.

ـ يشير للفصل الكلي Universal Class بالقيمة (1) الذي يمثل فصول كل الأشياء المنصورة باستقلال نام عما إذا كانت هذه الأشياء موجودة في الواقع أم لا.

ـ يرمز للفصل الفارغ Empty Class أو اللاوجود بالقيمة (0)، والفصل الفارغ هو الفصل الذي عضوه لا شيء.

ـ إذا قلنا أن (x= x) فإن هذا يعني أن (x متطابقة مع x).

ـ يرمز للاحتواء Inclusion بالعلامة (⊂) التي تعبر عن احتواء فصل في آخر.

ـ يضع رمزا لانتماء فرد Individual إلى فصل معين، وهذا هو ما يطلق عليه رمز الانتماء (∈) Belonging، فإذا كان فرد a في الفصل A أمكننا أن تعبر عن هذه الخاصية بالصيغة التي تعني أن: a belongs to A.

ـ يرمز لاتحاد الفصول أو المجموعات بالرمز (∪) الذي نقرأه Union.

ـ يرمز للتقاطع بين الفصول أو المجموعات بالرمز(∩) الذي نقرأه Intersection.

ـ يرمز للاحتواء التام Proper Inclusion بالعلامة (⊆)، فإذا قلنا أن $A \subseteq B$ فإن هذا يعني أن الفصل A محتوى في الفصل B، أي : أن أعضاء الفصل A هي ذاتها أعضاء في الفصل B، فإذا لم يكن أحد أعضاء الفصل A عضواً في الفصل B فإنه ليس من الصادق أن الفصل A محتوى في الفصل B.

رابعًا ـ جبر الأصناف والمنطق الرمزي(16).

أراد بول إقامة منطق على غرار علم الجبر، من حيث استخدام الحروف كرموز، وعلامات العمليات الحسابية كالجمع والضرب الخ، ويقيم القضايا على صورة معادلات تعبر عن مساواة بين طرفيها، ثم يحاول من هذه استنباط قضايا أخرى، إلا أن جبر المنطق عند بول يختلف عن الجبر الرياضي المتعارف عليه في أمور عدة منها دلالة حروف الهجاء، إذ أنه في الجبر الرياضي تدل الحروف على أعداد، بينما تدل في المنطق على أصناف، أما قيم القضايا كمعادلات في جبر الأصناف فتقتصر على عددين فقط هما (الصفر والواحد الصحيح)، لذلك فقد اختلفت قوانين جبر الأصناف عن قوانين الجبر الرياضي المألوف، كما أراد بول للمنطق أن يكون علماً

رمزيا، والرموز نوعان هما (المتغيرات والثوابت)، أما الثوابت فهي ثوابت الرياضة كعلامات الجمع والطرح والقسمة والمساواة والصفر والواحد الصحيح، كان يستخدم- كمتغيرات- الأحرف الثلاثة الأخيرة من هجاء الانجليزية وهي Z.Y.X وسنصطنع هنا الحرف "هـ" بدلاً من × ، "و" بدلاً من Y و "ى" بدلًا من Z، وكان بول يرمز بهذه المتغيرات إلى اصناف، ورموز الاصناف عند بول بديلة للحدود في المنطق التقليدي(17).

الصنف الشّامل والصنف الفارغ : تحدث بول في بداية حديثه عن جبر المنطق عن الأصناف بتمييزه بين نوعين منها وهم الصنف الشامل universe class والصنف الفارغ null- class، ويطلق على النوع الأول أحيانًا "عالم الأشياء المتصورة" universe of conceivable objects ويعني به الصنف الذي يكون كل شيء عضواً فيه، وهذا التعبير الاخير مضلل؛ لأنه يوهم أن بول يعني الحديث عن صنف يضم كل الاشياء في الكون ولكن لم يكن هذا مقصده، و"عالم المقال" تعبير أدق من وضع دي مورجان لتصحيح بول، وتوضح عالم المقال بمثال: أفرض اننا نتحدث عن صنف الناس، وأردنا الاهتمام بجزء منه وهو صنف المصريين، يمكننا تقسيم الناس -طبقاً لاهتمامنا- إلى المصريين واللامصريين (اللامصريون هم الأجانب أو كل انسان ما عدا المصري)، تقول عن المصريين واللامصريين أنهم يؤلفون صنفين وهذان الصنفان يؤلفان عالم المقال. وبالمثل نقول عن الذكور والإناث أنها يؤلفان عالم المقال في سياق الحديث عن صنف الحيوان ، وعن الجمهور والحكام أنها يؤلفان عالم المقال في سياق الحديث عن المواطنين في الدولة، وهكذا فالصنف الشامل أو عالم المقال صنف يضم كل شيء في سياق الحديث موضوع اهتمامنا.

نلاحظ أن "بول" ميّز في الصنف الشامل بين الصنف والصنف السالب ؛ صنف اللامصريين سلب صنف المصريين؛ كان الصنف الشامل يحوي الصنف وسليه، ورمزه عند "بول" هو الواحد الصحيح، أما الصنف الفارغ ويسميه "بول" أيضاً صنف اللاشيء فهو الصنف الذي لا توجد له في الواقع أمثلة ، ويرمز اليه بالصفر؛ ومن أمثلة الصنف الفارغ : الدائرة المربعة، ملوك فرنسا في القرن العشرين، الأعداد الزوجية الأولية أكبر من العدد2 (18) .

المســــــاواة: يستخدم بول علامة المساواة لتدل على أن لصفين نفس الأعضاء، (ه = و) ، تدل على أن الأفراد الذين يؤلفون الصنف الذي ترمز إليه بالحرف (ه) هم نفس الأفراد الذين ينتمون إلى الصنف الذي ترمز اليه بالحرف (و). إذا كان (هـ)

يرمز إلى الحيوان المفكر ، و إلى الحيوان الذي يمشي على رجلين ولا ريش له، قلنا أن كل أفراد الصنف الأول هم كل أفراد الصنف الثاني وهم أفراد الإنسان(19)

الضـــــرب المنطقي (20): يستخدم بول علامة الضرب للدلالة على أن الصنفين المضروبين يؤلفان صنفًا واحدًا جديدًا، يضم الأشياء التي تنتمي إلى كلا الصنفين معًا، أفرض أننا استخدمنا (ه)، لترمز إلى صنف العلماء، والحرف (و) إلى صنف المتواضعين فإن التعبير (ه × و) أو (ه . و) يدل على صنف العلماء المتواضعين، بحيث تستبعد من الصنف الجديد أولئك العلماء غير المتواضعين وأولئك المتواضعين الذين ليسوا علماء. لقد سمى المناطقة بعد بول هذه العملية "الضرب المنطقي" Logical product. وقد توصل بول من عملية الضرب المنطقي بين الأصناف إلى قانون في جبر المنطق يختلف عن مثيله في الجبر المألوف، نعني أن المعادلة (ه ه = ه) صحيحة في جبر الأصناف وأن كانت كاذبة في الجبر المألوف إلا إذا كانت قيمة ه صفراً أو الواحد الصحيح، ويفسر بول صحتها بقوله إن تداخل صنف في ذاته يؤدي إلى ذات الصنف ولا يضيف اليه جديدًا، وهناك قانونان آخران عند بول في جبر الاصناف: (1 × هـ = هـ)، (صفر x ه = صفر)، وإذا رمزنا بالواحد الصحيح إلى صنف الناس، وبالحرف هـ إلى المصريين، وأردنا تحديد الأعضاء الذين ينتمون إلى الصنفين معاً، وجدها انهم المصريون فقط، إما الصنف الذي ينتمي إلى المصريين وإلى صنف لا أفراد له في الواقع، فهو صنف لا أفراد له، ونلاحظ أن هذين القانونين الأخيرين صادقان أيضاً في الجبر المألوف.

الجمع المنطقي(21) : استطاع بول ان يصوغ صياغة دقيقة ذلك التشابه بين الفصل disjunction في الأصناف والجمع في الأعداد لقد استخدم (ه + و) ليدل على صنف الأفراد الذين ينتمون الى الصنف (ه) أو إلى الصنف (و)، لكن ينتمون إلى كليها معاً، افرض أننا رمزنا بالحرف (هـ) الى صنف الحيوان الذي يمشي على أربع، وبالحرف (و) الى صنف الحيوان الذي يمشي على بطنه، وبالحرف (أ) إلى صنف الثعابين، وأردنا معرفة أي الصنفين تنتمي إليه أفراد الثعابين، قلنا أن (أ) ينتمي إلى (ه) أو ينتمي إلى (و)، لكن لا ينتمي إليهما معا. ولقد سمى التعبير (هـ + و) من بعد بالجمع المنطقي Logical Sum، وقد توصل بول من فكرة الجمع المنطقي بين الأصناف إلى معادلة تختلف عن الجبر المألوف، وهي (ه + ه = ه).

الطـــرح المنطقي (22): انتقل بول من عملية الجمع المنطقي الى عملية الطرح المنطقي، كما انتقل من عملية الضرب إلى القسمة، يدل التعبير (هـ - و) على طرح

بين صنفين، فإذا كان (هـ = و + ي) فإن (ي = ه – و). مثال ذلك إذا دل (ه) على صنف الناس، (و) على الحيوانات، (ي) على الكائنات المفكرة فإن (هـ = و + ى)، وبالتالي (ي = ه – و)، أي أن صنف الكائنات المفكرة هو صنف الانسان مستبعدين منه صنف الحيوان، نلاحظ أن بول يستخدم الطرح أيضاً ليعبر عن الصنف السالب ورمزه (1 - ه). افرض اننا رمزنا بالواحد الصحيح الى كل الناس، كصنف شامل أو عالم مقال ، وبالحرف هـ الى المصريين، فإن (1 – ه)ـ يدل على كل الناس ما عدا المصريين.

جبر الاصناف والقضية الحملية (23)**:** تناول بول التصنيف الرباعي التقليدي للقضية الحملية تناولًا ينطوي على أن ترمز الحدود إلى أصناف لا إلى تصورات، وأن تصاغ القضية في صورة معادلة تحوى علامة المساواة ويكون أحد طرفي المعادلة صفراً أو واحداً صحيحاً، سترمز إلى موضوع القضية الحملية بالرمز (هـ)، وإلى المحمول فيها بالرمز (و) فيما يلي، يستخدم بول - أيضاً - الرمز (V) ليدل على سور القضية الجزئية في المنطق التقليدي، وسوف نعطي الحرف (جـ) ترجمة له ، وهذه قائمة التصنيف الرباعي للقضية الحملية عند التقليديين في مصطلح بول:

ك م: كل (ه) هو (و)   ه (1 - و) = صفر

ك س: لا (ه) هو (و)   ه و = صفر

جـ م: بعض (ه) هو (و)   ه و = (جـ) أو (ه و) ≠ صفر

جـ س: بعض (ه) ليس (و)   ه (1 - و) = جـ أو هـ (١ - و) ≠ صفر

خـــذ القضية كل الرياضيين يستخدمون الاستنباط لتوضيح قائمة بول؛ سنفترض أن هذه القضية صادقة؛ وترمز بالحرف (هـ) إلى صنف الرياضيين، بالحرف (و) إلى من يستخدم الاستنباط، وبالواحد الصحيح إلى عالم المقال وهو هنا الرياضيون والذين ليسوا رياضيين، (1 - و) ترمز إلى الذين لا يستخدمون الاستنباط، والآن يمكننا التعبير عن الكلية الموجبة في الصورة ه (1 - و) = صفر، وهذه تعنى أن صنف الأفراد الذين هم رياضيون ولا يستخدمون الاستنباط معاً صنف لا وجود له، ويعبر بول عن الكلية السالبة بالصيغة (هـ و = صفر)، أي أن الرياضيين الذين يستخدمون الاستنباط صنف فارغ (بافتراض صدق الكلية السالبة هنا)، الجزئية الموجبة وهي (هـ و = جـ) أو (ه و≠ صفر) تعني أن الأفراد الذين هم رياضيون ويستخدمون الاستنباط معًا صنف له وجود وليس صنفاً فارغاً، الجزئية السالبة وهي هـ (1 - و) = جـ تعني

أن الأفراد الذين هم رياضيون ولا يستخدمون الاستنباط لهم وجود واقعي ولا يمثلون صنفًا فارغًا (بافتراض صدق الجزئية السالبة).

خامسًا ــ الحساب التحليلي للقضايا المنطقية من خلال جبر المنطق(24)**.**

وعندما ننظر إلى القضية في الحساب التحليلي للقضايا، فإننا ننظر إليها ككل، فالذي يعنينا هو العلاقات المنطقية ذاتها، وتستخدم المتغيرات للإشارة إلى حدود القضايا، مع وجود الثوابت للربط بين المتغيرات وهي كالاتي:

رابطة النفي: ~ ق، وتقرأ ليس ق.

رابطة الفصل: ق ∨ ل، وتقرأ القضية ق أو القضية ل.

رابطة العطف: ق. ل، وتقرأ ق و ل.

رابطة اللزوم: ق ⊂ ل، وتقرأ إذا كانت القصية ق كانت القضية ل.

رابطة التكافؤ: ق ≡ ل، وتقرأ عناصر القضية ق تكافؤ عناصر القضية ل.

وتنتج الثوابت المنطقية علاقة قيمة صدق القضية المركبة، وقيمة القضايا الذرية، فلكل قضية قيم صدق Values- Truth، وهما الصدق Truth ويرمز له بالرمز (ص)، والكذب Falsity ويرمز بالرمز (ك)، ويتم صياغة قواعد الصدق بواسطة ما يسمى بـ "قوائم الصدق".

وتمثل قائمة الصدق في المنطق الرياضي قيم صدق القضايا المركبة، ومن خلال الجدول الذي سوف نعرضه يتم إثبات صحة وبطلان الاستدلالات المنطقية، بالإضافة إلى التمييز بين القضايا تحصيل الحاصل والقضايا التركيبية والمتناقضة(25)

ويمكن تمثيل جدول الصدق كالآتي:

ق	ل	ق.ل	ق ∨ ل	ق ⊂ ل	ق ≡ ل	~ ق
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ك
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ك
ك	ص	ك	ص	ص	ك	ص
ك	ك	ك	ك	ص	ص	ص

أما عن قواعد الاستدلال الاستنباطي في حساب القضايا المنطقية، فلابد في بادئ الأمر الإشارة إلى أن يكون الاستنباط إما اشتقاقًا أو برهانًا، ويتضمن الاشتقاق استنباط مقدمات محددة، أي تتسلسل من الجمل وتكون كل جملة فيها إما واحدة من المقدمات (جملة أولية)، أو جملة تعريف أو مشتقة مباشرة من جملة تسبقها في المتسلسلة، أما

البرهان فيكون الاستنباط بدون مقدمات، بحيث يكون سلسلة من الجمل وتكون كل جملة إما جملة أولية أو جملة تعريف أو مشتقة مباشرة من جملة سابقة لها في هذه السلسلة، كما يعتمد الاستنباط على مجموعة من القواعد نذكرها كالآتي(26)

1ـ **قاعـــدة التعويض :** تُعتبر هذه القاعدة قاعدة استدلالية إرشادية؛ لأنها تقوم بإدخال صيغ جديدة في القضايا، بمعنى أنه يتم تغيير المتغيرات الحرة في قضايا تحصيل الحاصل فيمكن وضع المتغيرات القضائية بدلاً من المتغيرات الحرة، فعلى سبيل المثال: **ق 7 (ل . م) ≡ (ق 7 ل) . (ق 7 م).**

ويمكن وضع (ك) بدلاً من (ق) في كافة مواضعها، فتكون كالآتي: **ك 7 (ل . م) ≡ (ك 7 ل) . (ك 7 م).**

2ـ **قاعـــدة الأبدال:** تقوم تلك القاعدة بإدخال تغييرات وصيغ جديدة، بدلاً من التعبيرات المركبة، ومن ثم يكون هناك تكافؤ بين التعبير الجديد والأصلي، فإذا كان لدينا الصياغة التالية: **ق ⊂ (~ ق 7 ل)**، ويمكن عن طريق قاعدة الإبدال والتعويض أن نحصل على الآتي:

ق ⊂ (~ ق 7 ل).

ق ⊂ (ق 7 ل).

أي أننا وضعنا (ق ⊂ ل) بدلاً من (~ ق 7 ل) لأنهما متكافئتان.

3ـ **قاعـــدة الاستدلال:** تعتبر هذه القاعدة الركيزة الأساسية للاستنباط، وتقوم هذه القاعدة على أنه إذا كانت قضية اللزوم **(ق ⊂ ل)** صادقة، وكانت (ق) صادقة فإنه يمكن تأكيد (ل)، وتتخذ هذه القاعدة الصيغة التالية:

$$\frac{\begin{array}{c}(\text{ق} \subset \text{ل})\\ \text{ق}\end{array}}{\text{ق}}$$

وتشمل هذه القاعدة عدد من القواعد منها قاعدة الإثبات بالوضع، والإنكار أو الرفع بالرفع، والقياس الشرطي، والقياس الفعلي، والإحراج المركب، والاستغراق، والتبسيط، والعطف، والجمع والإضافة، وسنعرض من خلال الجدول التالي أهم قواعد الاستدلال المستخدمة في المنطق الجبري (الرياضي)(27):

	قاعدة الإثبات بالوضع	قاعدة الرفع بالرفع

التعريف العام	**تشير تلك القاعدة إلى أنه على افتراض صدق اللزوم (ق ⊂ ل) في ظل إثبات (ق) يلزم عن ذلك التسليم بصدق التالي (ل).**	**تشير تلك القاعدة إلى أنه على افتراض صدق اللزوم (ق ⊂ ل) في ظل نفي (ل) يلزم عن ذلك التسليم بنفي المقدم (ق).**
الصيغة العامة	**((ق ⊂ ل) ∧ ق) ⊂ ل** **أو** (ق ⊂ ل) ق ——— ∴ ق **أو** إذا كان س هو ص، فإن ع هي ل لكن س هي ص ——— ∴ ع هي ل	**((ق ⊂ ل) ∧ ~ ل) ⊂ ~ ق** **أو** (ق ⊂ ل) ~ ل ——— ∴ ~ ق **أو** إذا كان س هو ص، فإن ع هي ل لكن ع ليست ل ——— ∴ ع هي ل
مثال	إذا كان العالم غامضًا، فإنه يكون محيرًا لكن العالم غامض ——— ∴ العالم محير	إذا كان العالم غامضًا، فإنه يكون محيرًا لكن العالم ليس محيرًا ——— ∴ العالم ليس غامضًا

	قاعدة القياس الشرطي
التعريف العام	**تتكون تلك القاعدة من قضيتين شرطيتين، حيث تشير إلى أنه على افتراض صدق اللزوم (ق ⊂ ل) واللزوم (ل ⊂ ع) يلزم عن ذلك التسليم بصدق اللزوم (ل ⊂ ع).**
الصيغة العامة	**((ق ⊂ ل) ∧ (ل ⊂ ع)) ⊂ (ل ⊂ ع)** **أو** ق ⊂ ل ل ⊂ ع ——— ∴ ل ⊂ ع **أو** إذا كان س هو ص، فإن ع هي ل إذا كان ع هو ص، فإن ه هي و ——— إذا كان س هو ص، فإن ه هي و
مثال	إذا كانت الحياة باقية، ظل الأمل موجودًا إذا كان الأمل موجودًا، فإمكان الإنسان تحقيق أهدافه ——— ∴ إذا كانت الحياة باقية، فإمكان الإنسان تحقيق أهدافه

الخاتمـــــــــة:

وفي الختام، يظل علم المنطق مهمًا لبناء أسس قوية للتحليل الفكري وفهم المعاني، مما يعـزز من قدرتنا على التواصل الفعّال والتفاهم.

ـ إن استكشاف المزيد في هذا المجال يفتح آفاقًا واسعة لتطوير تفكيرنا وتحقيق تقدم ملحوظ في مختلف الميادين الفكرية.

ــ يعد الحساب التحليلي للقضايا المنطقية، المعروف ـ أيضًا ـ بجبر المنطق، أداة قوية وضرورية في ميدان الفلسفة، الرياضيات، وعلوم الكمبيوتر، وذلك من خلال تزويدنا بأساليب واضحة ومنهجية للتعامل مع المفاهيم المنطقية.

ــ يوفر لنا هذا المجال وسيلة لفهم وتقييم القضايا المعقدة بطريقة دقيقة وموضوعية، حيث يظهر الحساب التحليلي للقضايا المنطقية كيف يمكن صياغة الأفكار في صيغة يمكن تحليلها وإدارتها بشكل دقيق، هذا يجعل المنطق أداة ذات قيمة ليس فقط في الفلسفة، بل ـ أيضًا ـ في مجالات علمية متعددة كعلوم الحاسوب والرياضيات والذكاء الاصطناعي

.

الهوامـــــــــــــش:

[1]- ماري لويز رور، مبادئ المنطق المعاصر، ترجمة: محمود يعقوبي، دار الكتاب الحديث، 2012، ص 30.

[2]- السيد عبد الفتاح جاب الله، مفهوم قيمة الصدق وتطوره في الأنساق المنطقية المعاصرة "من قيمة الصدق إلى درجات الصدق"، مجلة كلية الآداب جامعة بورسعيد، العدد الرابع والعشرون 2023م، ص 280، 281.

[3]- حجاج خليل، مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة الثالثة فلسفة ليسانس المنطق الرمزي، جامعة ابن خلدون، كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية، قسم العلوم الاجتماعية، 2022م، ص 11.

[4]- العربي دواجي أمينة ويموتن علجية، الترميز، الصورنة والمنطق الشارح عند روبير بلانشي، مجلة الحوار الثقافي، المجلد العاشر، العدد الثاني عشر، 2020م، ص 103.

[5]- عبد القادر عدالة، المنطق الرياضي بين اليقين العلمي والعمق الفلسفي، أطروحة لنيل شهادة الدكتوراه، جامعة وهران، كلية العلوم الاجتماعية، قسم الفلسفة، 2009، ص 16.

[6]- بول موي، المنطق وفلسفة العلوم، ترجمة: فؤاد زكريا، مؤسسة هنداوي، 2023، ص 32.

[7]- بوعلام معطر، تطور المنطق الرياضي وحدود تطبيقاته روبير بلانشي انموذجا، مذكرة مقدمة لنيل درجة ماجستير في الفلسفة، تخصص: المنطق والعلوم المعرفية، جامعة الجزائر، كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية، 2015، ص 50.

[8]- محمد ثابت القندي، أصول المنطق الرياضي (لوجستيقا Logistic)، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، 1972م، ص 97، 98.

[9]- عبد الرحمن علي الزرقاني، العلاقة بين المنطق والرياضيات: من جبر المنطق إلى المنطق الرياضي، مجلة جامعة صبراتة العلمية، العدد الرابع، 2018م، ص 86.

[10]- سمية حليس، أزمة الرياضيات وانعكاساتها على نشأة المنطق الرياضي، مذكرة ماستر العلوم الاجتماعية، جامعة محمد خيضر بسكرة، جامعة العلوم الإنسانية والاجتماعية، 2023م، ص 38.

[11]- حمر العين زهور، المنطق التقليدي وصورنة المنطق الرياضي، جامعة وهران السانيا، كلية العلوم الاجتماعية، 2009م، ص 53، 54.

[12]- روبير بلانشي، المنطق وتاريخه من ارسطو حتى راسل، ترجمة: خليل أحمد خليل، ديوان المطبوعات الجامعية- المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، الجزائر- لبنان، د.ت، ص 365، 366.

[13]محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي نشأته وتطوره، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، 1979م، ص 75.

[14] محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي نشأته وتطوره، مرجع سابق، ص 76.

[15] ماهر عبد القادر محمد علي، فلسفة العلوم المنطق الرياضي، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، ج 3، ص 23، 24.

[16]- محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي نشأته وتطوره، مرجع سابق، ص 76، 77.

[17]- فاطمة فواطمية، السايح حمادي، الصيرورة المنطقية وعلم الرياضيات، مجلة أفاق علمية، المجلد الخامس عشر، العدد الثاني، 2023م، ص 308.

[18]- أحمد عصام الدين، منطق الكمبيوتر بحث في علاقة منطق جورج بول بالهاردوير، مجلة جامعة مصر للدراسات الإنسانية (العلوم الاجتماعية والإنسانية)، المجلد الأول، العدد الأول، 2021م، ص 283.

[19]- محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي نشأته وتطوره، مرجع سابق، ص 78، 79.

[20]- أحمد رشوان أحمد رشوان، منطق الفئات وجذوره الارسطية، رسالة مقدمة للحصول على درجة الماجستير، جامعة القاهرة، كلية الآداب، قسم الفلسفة، 2002م، ص 126- 129.

[21]- محمد محمد قاسم، نظريات المنطق الرمزي بحث في الحساب التحليلي والمصطلح، دار المعرفة الجامعية، 2002، ص 303، 304.

[22]- محمد محمد قاسم، نظريات المنطق الرمزي بحث في الحساب التحليلي والمصطلح، المرجع السابق، ص 304.

[23]- محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي نشأته وتطوره، مرجع سابق، ص 82.

[24]- هبة السيد الجنايني، المنطق الرياضي وآليات الاستنباط الدقيق، مجلة وادي النيل للدراسات والبحوث الإنسانية والاجتماعية والتربوية، المجلد الخامس عشر، العدد الخامس عشر، 2017، ص 280- 281.

[25]- حسين علي، مبادئ المنطق الرمزي، دار الجوهرة للنشر والتوزيع، القاهرة، 2014م، ص 93.

[26]- هبة السيد الجنايني، المنطق الرياضي وآليات الاستنباط الدقيق، مرجع سابق، ص 283.

[27]- هبة السيد الجنايني، المنطق الرياضي وآليات الاستنباط الدقيق، مرجع سابق، ص 284، 285.